Analiza zespolona
Lista 4

Zad 1. Wykazać, że dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $e^z \neq 0$,

b) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$,

c) $e^{z_1+z_2} = e_1^z e^{z_2}$.

Zad 2. Narysować obraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : 0 < Imz < \pi \wedge Rez < 0\}$ przy odwzorowaniu $f(z) = e^z$.

Zad 3. Wykazać, że

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$

b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$,

c) $\sin iz = i\mathrm{sh}z, \qquad \cos iz = \mathrm{ch}z$.

Na podstawie a), b), c) wyznaczyć $|\cos z|$, $|\sin z|$.

Zad 4. Wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}z$, $\mathrm{ch}z$.

Zad 5. Niech $f(z)$ będzie ustaloną gałęzią logarytmu $\ln z$. Znaleźć $f(D)$, gdzie

$$D = \{z \in \mathbb{C} : e^{-1} < |z| \leq e\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0 \text{ i } Re(z) \leq 0\}.$$

Zad 6. Niech $f(z) = \sin z$. Znaleźć $f(A)$, gdzie

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Zad 7. Zbadać czy ciąg jest ograniczony:

a) $z_n = e^{in}$, *b)* $z_n = \frac{(2-i)^n}{n}$, *c)* $z_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$ *d)* $z_n = \frac{3n+1}{(-1)^n n + 2i}$, *e)* $dz_n = \frac{in+1}{n+1}$.

Zad 8. Znaleźć granicę ciągu:

a) $z_n = (1 + \frac{i\pi}{n})^n$, *b)* $z_n = \frac{n!}{(ni)^n}$, *c)* $z_n = \frac{2^n+i}{2^n-i}$, *d)* $z_n = \frac{in+1}{n+i}$, *e)* $z_n = \frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n}$.

Zad 9. Sprawdzić, że $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^z$

Zad 10. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3i}{(i\sqrt{n})^3}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+2i}$.

Zad 11. Zbadać bezwzględną zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\sqrt{n}+1}{n}$.

Zad 12. Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną liczby $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Zad 13. Znaleźć sumy szeregów: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nt$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nt$, gdzie $r, t \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < 1$.

Zad 14. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}, \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} z^n, \qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} z^{n^2}.$$